

经典大系统理论与现代复杂网络系统

席裕庚

2012年5月10日

主要内容

1. 思考的起因：复杂网络结构可控性
2. 经典大系统方法的一些回顾及复杂网络的相关问题
3. 几点思考

思考的起因：

复杂网络结构可控性

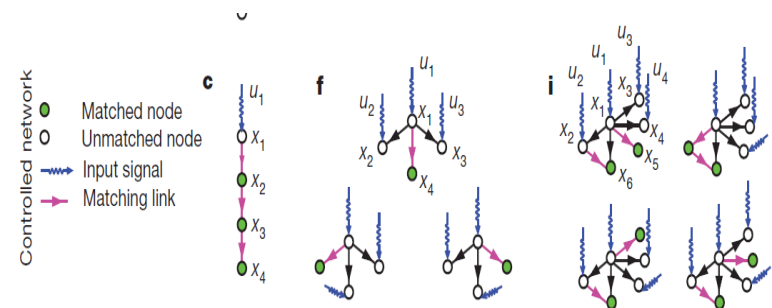
Controllability of complex networks

Yang-Yu Liu^{1,2}, Jean-Jacques Slotine^{3,4} & Albert-László Barabási^{1,2,5}

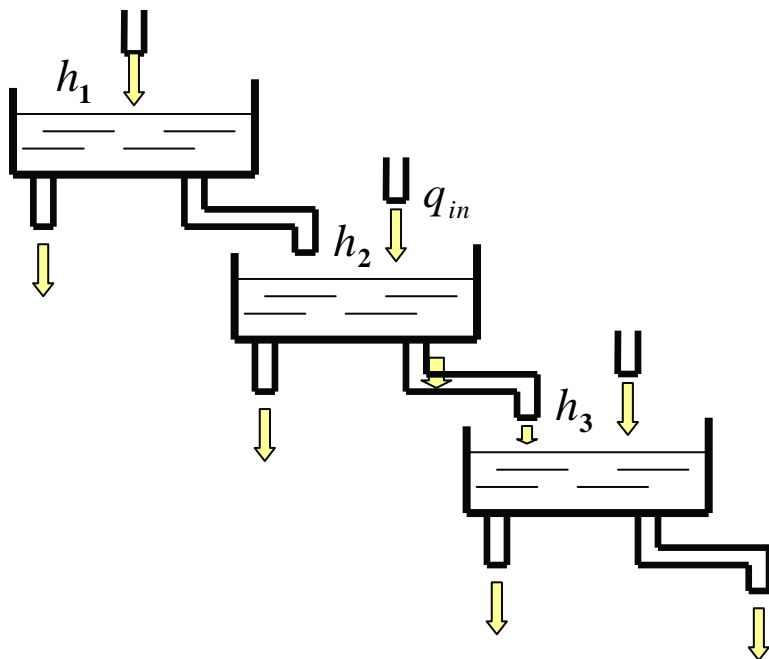
(3). A structurally controllable system can be shown to be controllable for almost all weight combinations, except for some pathological cases with zero measure that occur when the system parameters satisfy certain accidental constraints^{26,27}. Thus, structural controllability helps us to overcome our inherently incomplete knowledge of the link weights in A . Furthermore, because structural controllability implies controllability of a continuum of linearized systems²⁸, our results can also provide a sufficient condition for controllability for most non-linear systems³ (Supplementary Information, section III.A).

we can gain full control over a directed network if and only if we directly control each unmatched node and there are directed paths from the input signals to all matched nodes²⁹. The possibility of

Hopcroft, J. E. & Karp, R. M. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM J. Comput.* 2, 225–231 (1973).



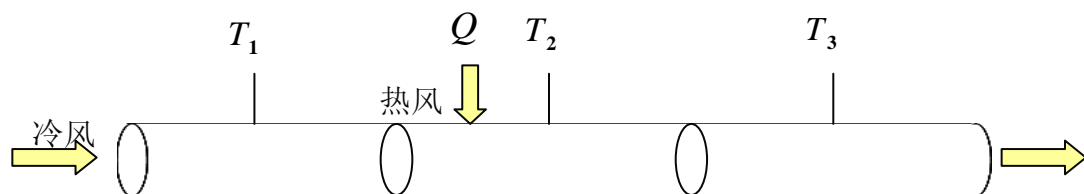
大系统理论中的动态系统结构分析



$$\dot{h}_1 = f_1(h_1)$$

$$\dot{h}_2 = f_2(h_1, h_2, q_{in})$$

$$\dot{h}_3 = f_3(h_2, h_3)$$



$$\dot{T}_1 = F_1(T_1)$$

$$\dot{T}_2 = F_2(T_1, T_2, Q)$$

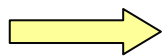
$$\dot{T}_3 = F_3(T_2, T_3)$$

结构可控性

在工作点线性化可得到线性方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + bu \\ \dot{x}_3 &= a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ b & a_{22}b & a_{22}^2b \\ \mathbf{0} & a_{32}b & a_{32}(a_{22} + a_{33})b \end{bmatrix} \leq 2$$



系统不可控

上世纪70-80年代，控制领域内已有很多关于结构可控性的研究成果

C.T.Lin, Structural Controllability, IEEE Trans.on AC, 19(3):201-208, 1974

R.W. Shields, J.B.Pearson, Structural Controllability of Multiinput Linear Systems, IEEE Trans.on AC, 21(2):203-212, 1976

K. Glover, L. M. Silverman, Characterization of Structural Controllability, IEEE Trans.on AC, 21(4):534-537, 1976

C.T.Lin, System Structure and Minimal Structure Controllability, IEEE Trans.on AC, 22(5):855-862, 1977

S.Hosoe, K.Matsumoto, On the Irreducibility Condition in the Structural Controllability Theorem, IEEE Trans.on AC, 24(6):963-966, 1979

H.Mayeda, On Structural Controllability Theorem, IEEE Trans.on AC, 26(3):795-798, 1981

A.Linnemann, A Further Simplification in the Proof of the Structural Controllability Theorem, IEEE Trans.on AC, 31(7):638-639, 1986

代数判据

C. T. Lin, IEEE TAC.,19(3):201-208, 1974

K. Glover and L. M. Silverman, IEEE TAC,21(4):534-537, 1976.

M.Morari, G.Stephanopoulos, AIChE Journal, 26(2):232-246, 1980

1. 系统是输入可达的, 即 R_{ux} 无全零列

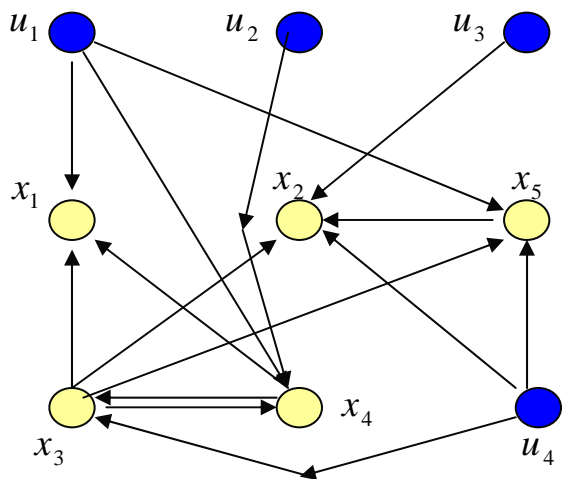
2. $gr \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} = n$

对于该例

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \times & \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \times \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \times \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$R_{ux} = [\mathbf{0} \quad \times \quad \times] \quad \longrightarrow$$

x_1 不可达
系统不可控



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_3, x_4, u_1) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_3, x_5, u_3, u_4) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_3, x_4, u_4) \\ \dot{x}_4 &= f_4(x_3, x_4, u_1, u_2) \\ \dot{x}_5 &= f_5(x_3, u_1, u_4) \end{aligned}$$

可达性

$$R_{ux} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \end{matrix}$$

秩条件

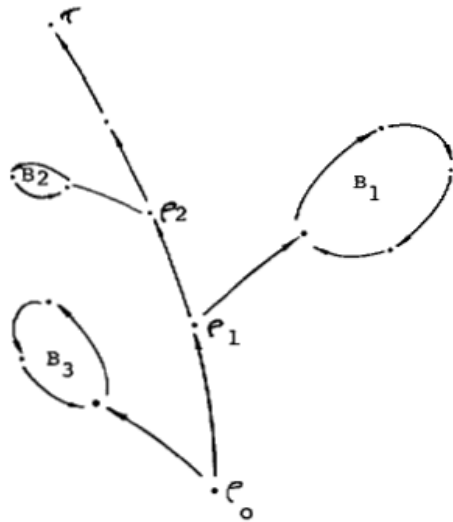
$$S = \begin{matrix} & x_3 & x_4 & u_1 & u_4 & u_2 & x_5 & u_3 \\ \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \times & \times & 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & 0 & \times & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow gr[\bar{A} \quad \bar{B}] = 5$$

结论：该系统结构可控

图论判据



结构可控

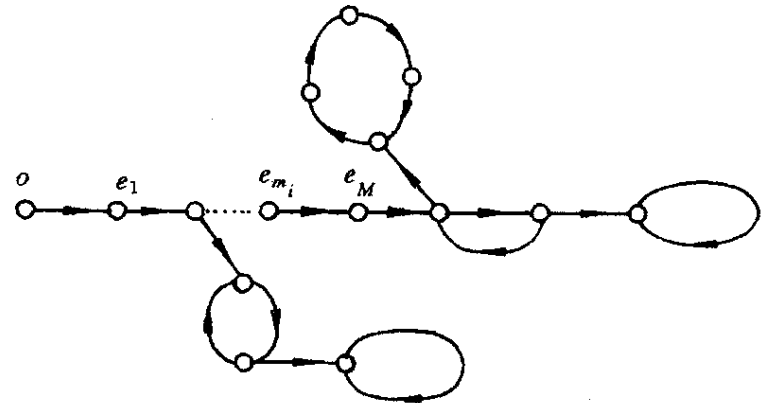


(A,b) 构成仙人掌(cactus)

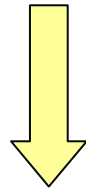
C.T.Lin, Structural Controllability, IEEE Trans.on AC, 19(3):201-208, 1974

推广到类仙人掌(G-cactus)

K.Li, Y.Xi, G-Cactus and New Results on Structural Controllability of Composite Systems, Int.J.System Science, 27(12):1313-1326, 1996



Taken together, our results indicate that many aspects of controllability can be explored exactly and analytically for arbitrary networks if we combine the tools of network science and control theory, opening new avenues to deepening our understanding of complex systems.



网络科学工具与控制理论的结合将有助于精确和解析地探索复杂网络可控性的许多问题

经典大系统方法的一些回 顾及复杂网络的相关问题

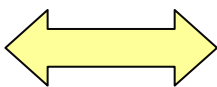
大系统结构分解

目的：把复杂大系统分解为子系统，并且给出子系统间的有序影响关系

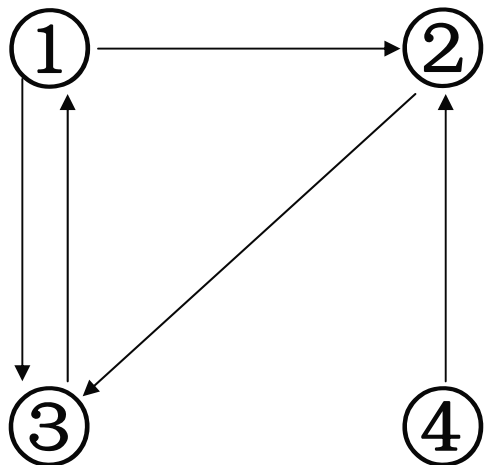
大系统中的结构分解

结构矩阵：反映系统各单元间因果关系

有向图表示



邻接矩阵表示



	①	②	③	④
①	0	×	×	0
②	0	0	×	0
③	×	0	0	0
④	0	×	0	0

几种典型结构

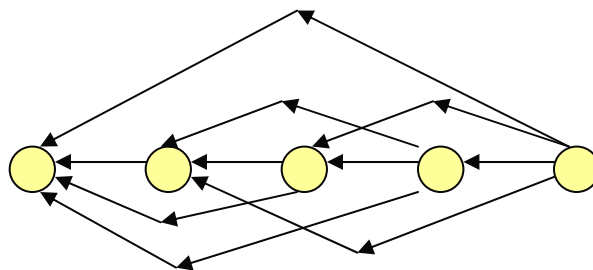
$$\begin{bmatrix} \times & & & & \\ & \times & & & \\ & & \times & \times & \\ & & \times & \times & \\ & & & & \times \end{bmatrix}$$



对角或块对角

完全可分解

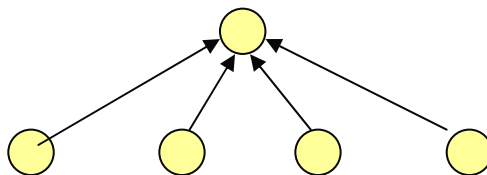
$$\begin{bmatrix} \times & & & & \\ \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$



三角或块三角

单方向影响

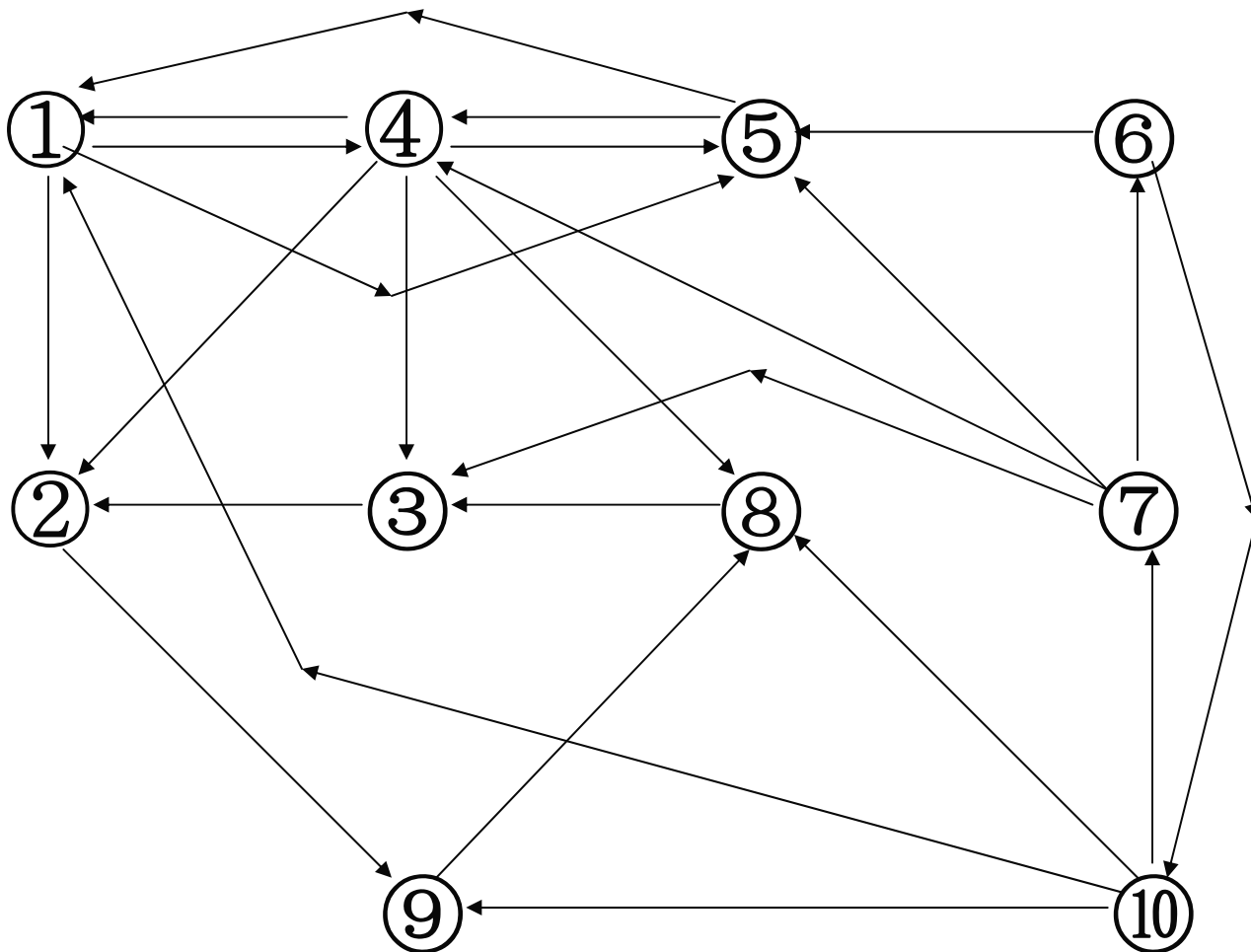
$$\begin{bmatrix} \times & & & & \\ \times & \times & & & \\ \times & 0 & \times & & \\ \times & 0 & 0 & \times & \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$



对角加列

主-从式关系

大系统结构分解举例

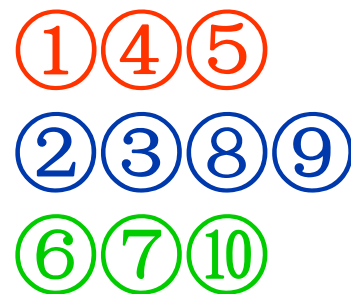


邻接矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & \times & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \end{bmatrix}$$

利用可达矩阵找出回路

$$R \cap R^T = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$



把同一回路的节点归并在一起

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \times & \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \times & \mathbf{0} & \times & \times & \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \times & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{8} \\ \textcircled{9} \\ \textcircled{6} \\ \textcircled{7} \\ \textcircled{10} \end{matrix} \left. \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{8} \\ \textcircled{9} \end{matrix} \right\} S_1 \left. \begin{matrix} \textcircled{6} \\ \textcircled{7} \\ \textcircled{10} \end{matrix} \right\} S_3 \left. \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} \right\} S_2$$

把回路压缩成节点，分析回路之间关系

$$A \rightarrow B = \begin{bmatrix} \times & \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix}$$

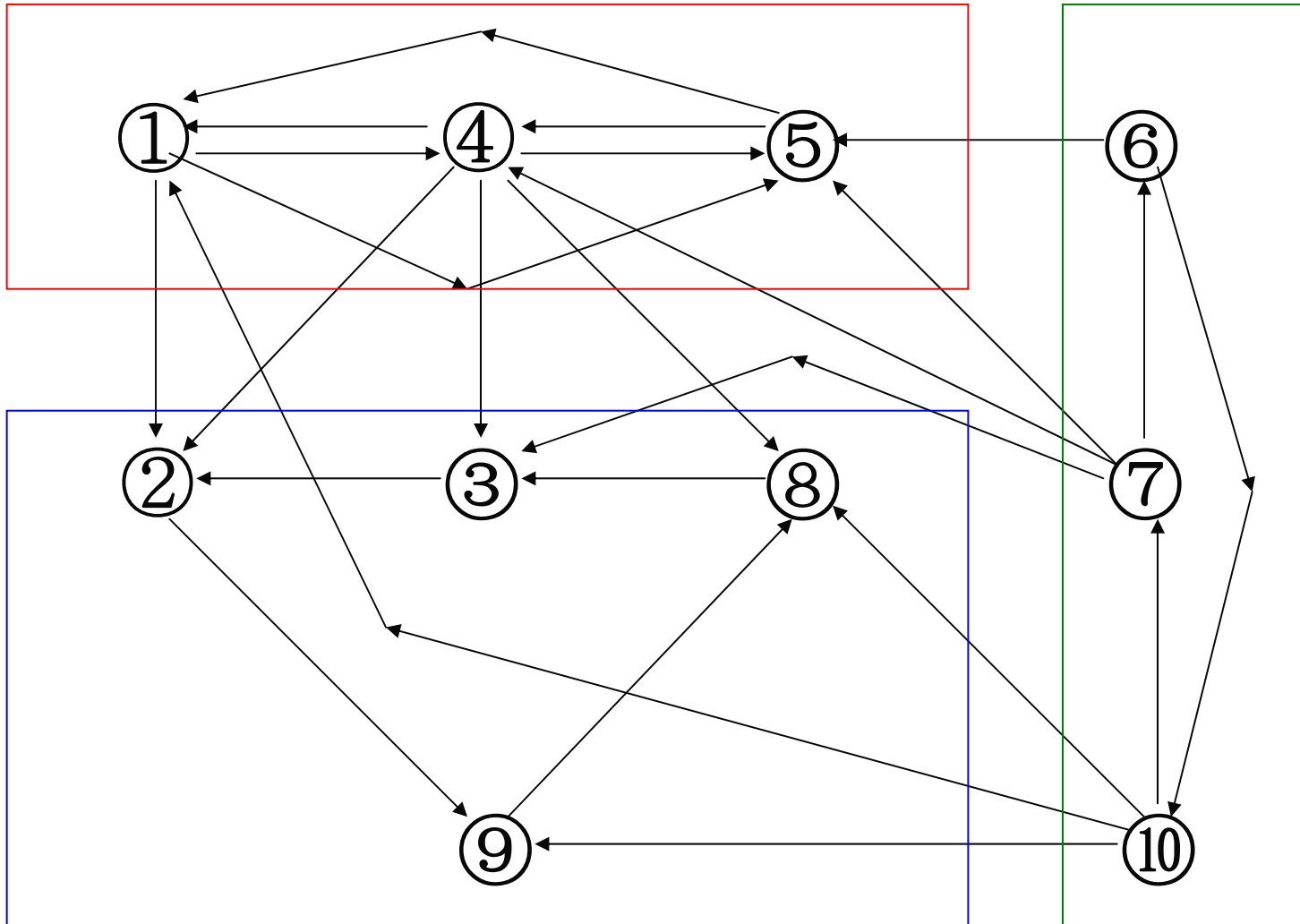
调整节点位置

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \times & \times & \mathbf{0} \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{matrix} S_2 \\ S_1 \\ S_3 \end{matrix}$$

最终得到调整后的邻接矩阵

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|ccc|ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \times & \times & \times & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{8} \\ \textcircled{9} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \\ \textcircled{7} \\ \textcircled{10} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_2 \\ S_1 \\ S_3 \end{array} \end{array}$$

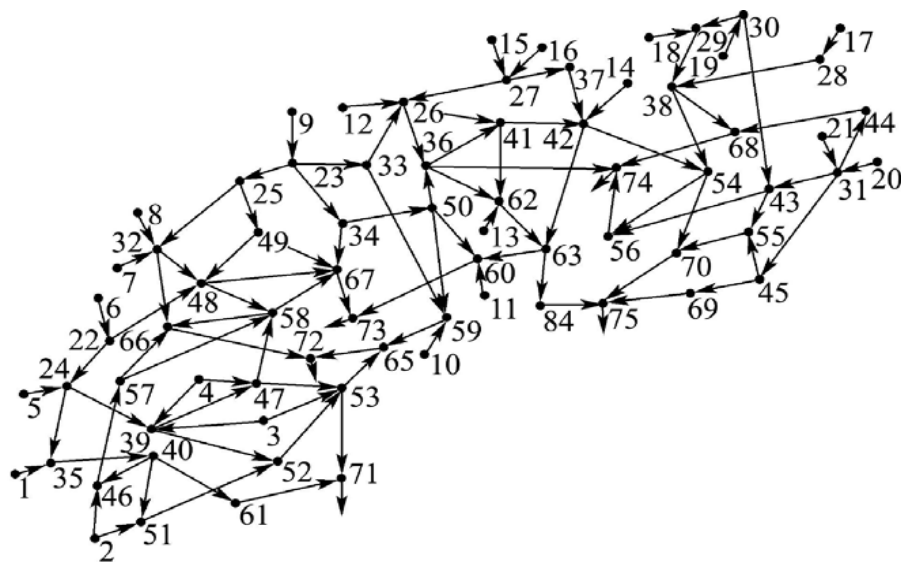
既受其它点影响，又影响其它点



只影响其它点，不受其它点影响

只受其它点影响，不影响其它点

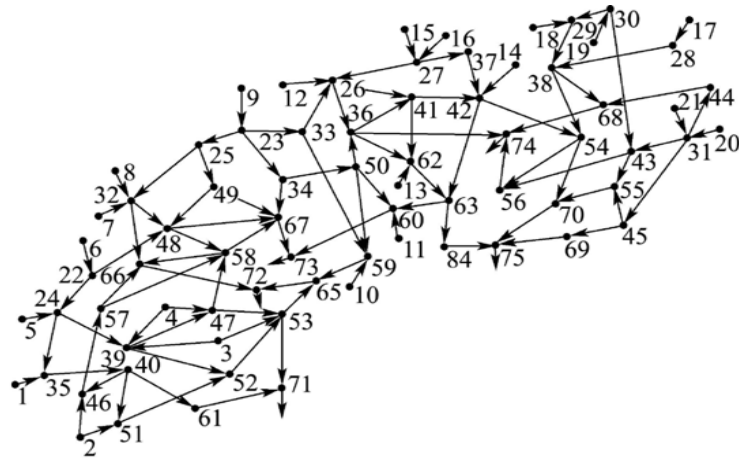
复杂网络中的区域分解



复杂网络中的社团分解方法:

- 把整个网络分解为若干社团，社团内节点连接较多而各社团间只通过少量边连接
- 通过寻找网络中具有最大betweenness值的边，将其从网络中删除对整个网络进行社团分解

大系统方法用于复杂网络分解的可能性



复杂网络中节点之间的连接多，按是否可达分解可能不能分解为子块。

对于**加权网络**，边的权系数反映了其两端节点之间关联的强弱，可通过设定阈值，把节点之间的连接近似为有（1）和无（0），再按大系统结构方法对网络分解，分解后网络中联系较紧密的节点将分在同一块，各块之间的联系相对较弱。

对于**非加权网络**，引入k步可达概念，构建k步可达矩阵，找出在k步之内相互可达的节点群，对应于网络中“度”较高的节点确定节点群的划分，实现把整个网络分解为围绕“度”较高节点的“抱团”紧的子网络的连接关系。

大系统可行控制方案的选择

目的：找出大系统的控制方案保证结构可控

结构可控性的应用

从宏观上判断系统是否可控

若结构不可控，则相应的数值系统必不可控

用于控制系统方案设计保证系统可控

选择必要的控制量，保证系统状态完全可控

在众多可能的控制方案中，选择最合适的控制方案

— 最少控制输入

— 具有最好容错性的控制输入。。。

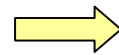
确定系统结构可控的最少控制输入方案

秩条件

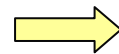
$$S = \begin{matrix} & x_3 & x_4 & u_1 & u_4 & u_2 & x_5 & u_3 \\ \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \end{matrix}$$

用标记法判断去除哪些列可保持S满秩

(R.D.Johnston, G.W.Barton, M.L.Brisk, Determination of the generic rank of structural matrices, Int.J.Control, 40(2):257-264, 1984)



第1-5列中可去除1列
第6-7列中可去除1列



3种选择 $\{u_1, u_2\}$ $\{u_1, u_4\}$ $\{u_2, u_4\}$

复核输入可达性

3种选择均满足输入可达

结论：满足系统结构可控的最少控制输入有3种选择方案

$$\{u_1, u_2\} \quad \{u_1, u_4\} \quad \{u_2, u_4\}$$

应用于精馏塔选择可行的控制方案

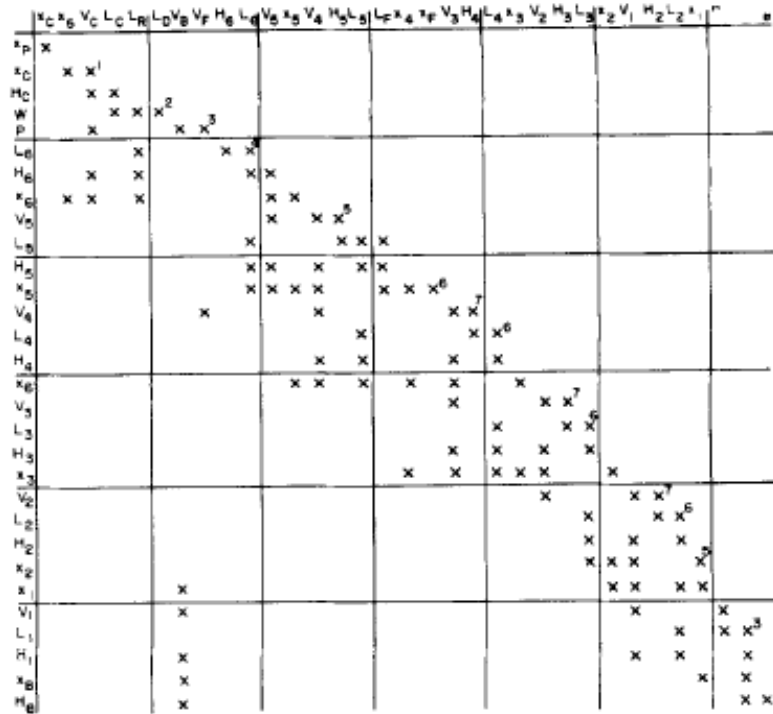


Figure 11. Reordered structural matrix of the distillation column (example 3).

two variables from the set

$$V_c, L_c, L_R, L_D$$

three variables from the set

$$V_c, L_c, L_R, L_D, V_B, V_F, L_F, x_F, L_B$$

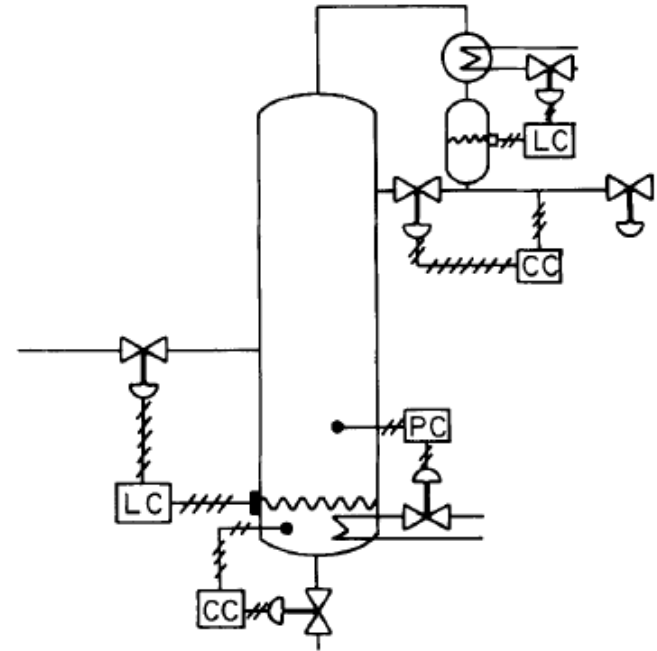
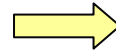


Figure 12. A feasible control structure for the distillation column (example 3).

(M.Morari, G.Stephanopoulos, Studies in the Synthesis of Control Structures for Chemical Processes, Part II: Structural Aspects and the Synthesis of Alternative Feasible Control Schemes, AIChE Journal, 26(2):232-246, 1980)

对偶问题：大系统结构可观性及其应用

结构可观性及其判据

1. 系统是输出可达的，即 R_{xy} 无全零行

2.
$$gr \begin{bmatrix} \overline{A} \\ \overline{C} \end{bmatrix} = n$$

结构可观性的应用

选择必要的传感器，保证系统状态完全可观

在众多可能的检测方案中，选择最合适的方案

- 最少数量传感器
- 成本最低传感器 . . .

复杂网络系统中的牵制控制

牵制控制的基本思想

通过有选择地对网络中的少部分节点施加控制而使整个网络具有期望的行为。

牵制控制研究的基本问题

- 1.可行性问题：对部分节点施加控制使整个动态网络达到期望的状态
- 2.有效性问题：如何选择控制节点使达到控制目标所花的代价最小

复杂网络系统中的信息监测

信息监测的基本思想

通过有选择地对网络中的少部分节点进行监测而了解整个网络（或部分关键部位）的动态。

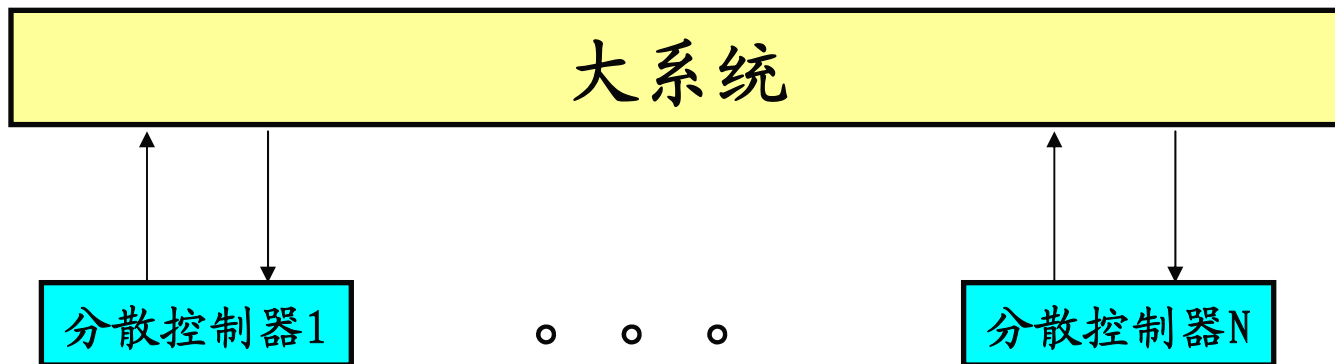
信息监测的基本问题

- 1.关键部位信息监测问题：对部分节点进行监测而使网络中指定的关键部位信息能得到反映（部分状态结构可观）
- 2.有效性问题：如何选择监测点使达到目标所花的代价最小

大系统分散控制

目的：子系统利用本子系统（全分散）
或有限邻接子系统信息（部分分
散）设计控制器达到整体稳定或
配置极点

大系统理论中的分散控制



$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^N B_i u_i$$
$$y_i = C_i x, \quad i = 1, \dots, N$$

设计分散输出反馈控制律镇定系统

$$u_i = f_i(y_i), \quad i = 1, \dots, N$$

分散控制的固定模

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dots \\ \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dots \\ \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{21} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_2 \\ \dots \\ u_3 \end{bmatrix}$$

该系统 (A, B) 可控，且每个子系统 (A_i, B_i) 可控，但采用分散状态反馈控制

$$u_i = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{bmatrix}$$

闭环系统有固定模 $\lambda = 0$

(Wang, S.H., An example in decentralized control, IEEE TAC, 23(5):938, 1978)

固定模产生的原因

集中控制时特征值的可控可观性

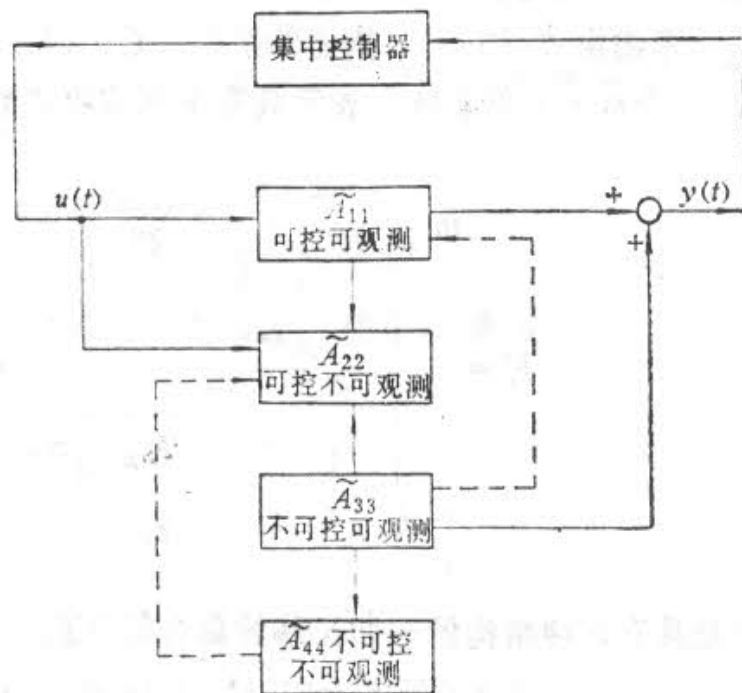
Kalman标准型

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

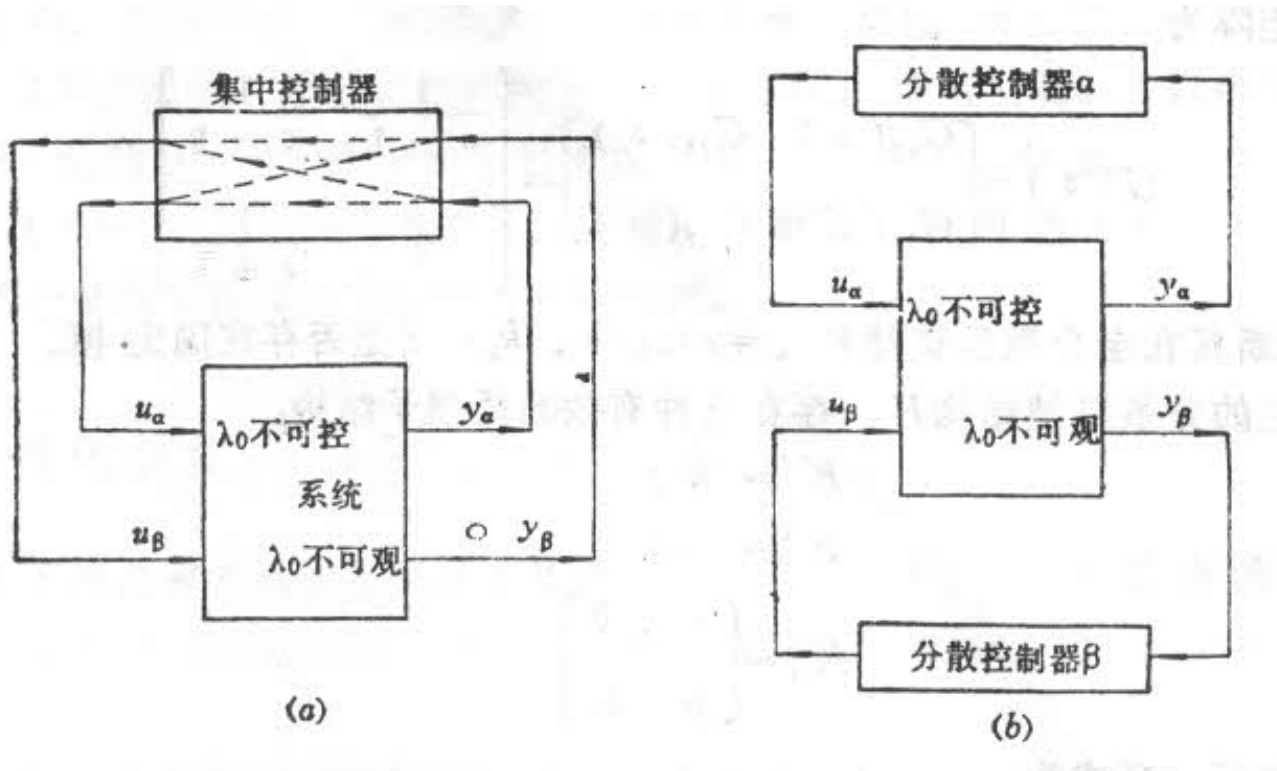
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \quad 0 \quad C_3 \quad 0]$$



不可控可观部分不构成通路，相应的特征值无法通过控制改变！

分散控制时为什么会产生新的固定模？



由于信息结构的约束，增加了不构成通路的可能性，使一些集中情况下可控可观的特征值也变得无法通过控制改变！

经典大系统理论中对固定模的研究

固定模的判据

- 根据定义计算
- 基于(C,A,B)的判据
- 基于G(s)的判据

消除固定模的办法：改变反馈结构，即增加哪些反馈通路可以消除固定模

- 增加最少的通信通道消除固定模
- 最经济信息结构综合：消除固定模并使附加通信成本最低

在上世纪70-80年代涌现了大量研究成果

分散化镇定与分散化极点配置

分散可镇定的充要条件

系统 (C, A, B) 对于分散反馈结构 \bar{K} 不存在不稳定固定模

固定模的判别解决能不能控制的问题，具体如何实现分散化镇定或极点配置？

设计动态分散输出反馈控制律

$$\begin{aligned} u_i &= H_i z_i + K_i y_i \\ \dot{z}_i &= F_i z_i + S_i y_i \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

分散化镇定的设计 — 顺序设计

从 (C_1, A, B_1) 出发，用全局方法设计 u_1 ，闭环系统阵为 \bar{A}
再对 (C_2, \bar{A}, B_2) 用全局方法设计 u_2, \dots

分散化极点配置举例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由两个控制器实现分散控制，改写为分散控制标准形式

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad C_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

分散反馈结构为

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

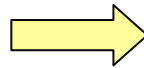
根据充要条件判断系统是否分散可镇定

- 开环系统有四重特征值 $\lambda = 0$ ，经判定可知，当 $\gamma \neq 1$ 时系统可分散镇定。
- 系统 (C_1, A, B_1) 和 (C_2, A, B_2) 都不是能控能观的，即对于单个控制站的反馈控制 $\lambda = 0$ 都是固定模，但它们的联合作用可以使其不是固定模，从而可镇定。
- 可分散镇定不等于用静态输出反馈可镇定。本例即使不是分散控制都不行。

静态输出反馈

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A - BKC) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -k_{11} & \lambda & -k_{12} & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda & -1 \\ -k_{21} & 0 & -k_{22} & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^4 - (k_{11} + k_{12}\gamma + k_{21} + k_{22})\lambda^2 + (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})(1 - \gamma) \end{aligned}$$



系统无法镇定

采用顺序设计方法设计分散动态输出反馈控制器

控制站1

$$\dot{z}_1 = -6z_1 + y_1$$

$$u_1 = 60z_1 - 11y_1$$

控制站2

$$\dot{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{36(2\gamma-1)}{\gamma-1} & -\frac{72(2\gamma-1)}{\gamma-1} & -\frac{58\gamma-47}{\gamma-1} & -12 \end{bmatrix} z_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_2$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} \frac{360-756\gamma}{(\gamma-1)^2} & \frac{660-1452\gamma}{(\gamma-1)^2} & \frac{360-481\gamma}{(\gamma-1)^2} & -\frac{60}{\gamma-1} \end{bmatrix} z_2 + \frac{11}{\gamma-1} y_2$$

闭环系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_1 k_1 C_1 + B_2 k_2 C_2 & B_1 h_1 & B_2 H_2 \\ s_1 C_1 & f_1 & 0 \\ S_2 C_2 & 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 0 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{\gamma-1} & 0 & 0 & \frac{360-756\gamma}{(\gamma-1)^2} & \frac{660-1452\gamma}{(\gamma-1)^2} & \frac{360-481\gamma}{(\gamma-1)^2} & -\frac{60}{\gamma-1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{36(2\gamma-1)}{\gamma-1} & -\frac{72(2\gamma-1)}{\gamma-1} & -\frac{58\gamma-47}{\gamma-1} & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

闭环特征多项式

$$\begin{aligned} & s^9 + 18s^8 + 141s^7 + 630s^6 + 1767s^5 + 3222s^4 + 3815s^3 + 2826s^2 + 1188s + 216 \\ & = (s^3 + 6s^2 + 11s + 6)^3 = (s+1)^3(s+2)^3(s+3)^3 \end{aligned}$$

复杂网络中的相关问题

多智能体的分散状态反馈

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u_1, \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + A_{21} x_1 + B_2 u_2, \\ y_1 = C_1 x_1, y_2 = C_2 x_2, \end{cases}$$

“分散状态反馈”实质上是经典意义下的分散输出反馈，相当于

$$\begin{aligned} y_i &= C_i x, & C_i &= [0 \quad \cdots \quad I_i \quad \cdots \quad 0] \\ u_i &= K_i x_i = K_i C_i x = K_i y_i \end{aligned}$$

有没有固定模问题？

只用静态输出反馈能否镇定系统？

几点思考

1. 经典大系统理论研究的是由相互关联子系统组成的大系统，为什么不能直接推广到复杂网络系统？

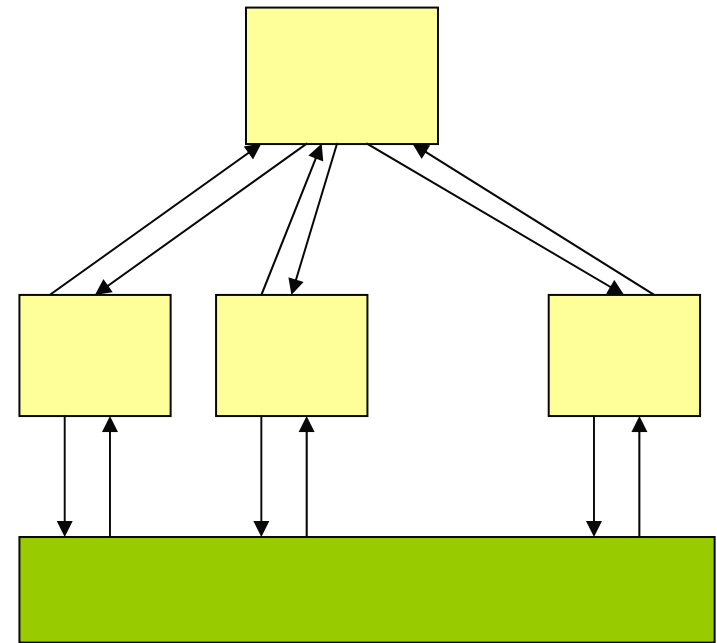
经典大系统：模型已知、状态方程、确定性系统、有限维数（尽管很高）、从微观出发

复杂网络系统：模型不一定清楚、未必有状态方程、考虑随机性、超高维数、从宏观出发

复杂网络



大系统

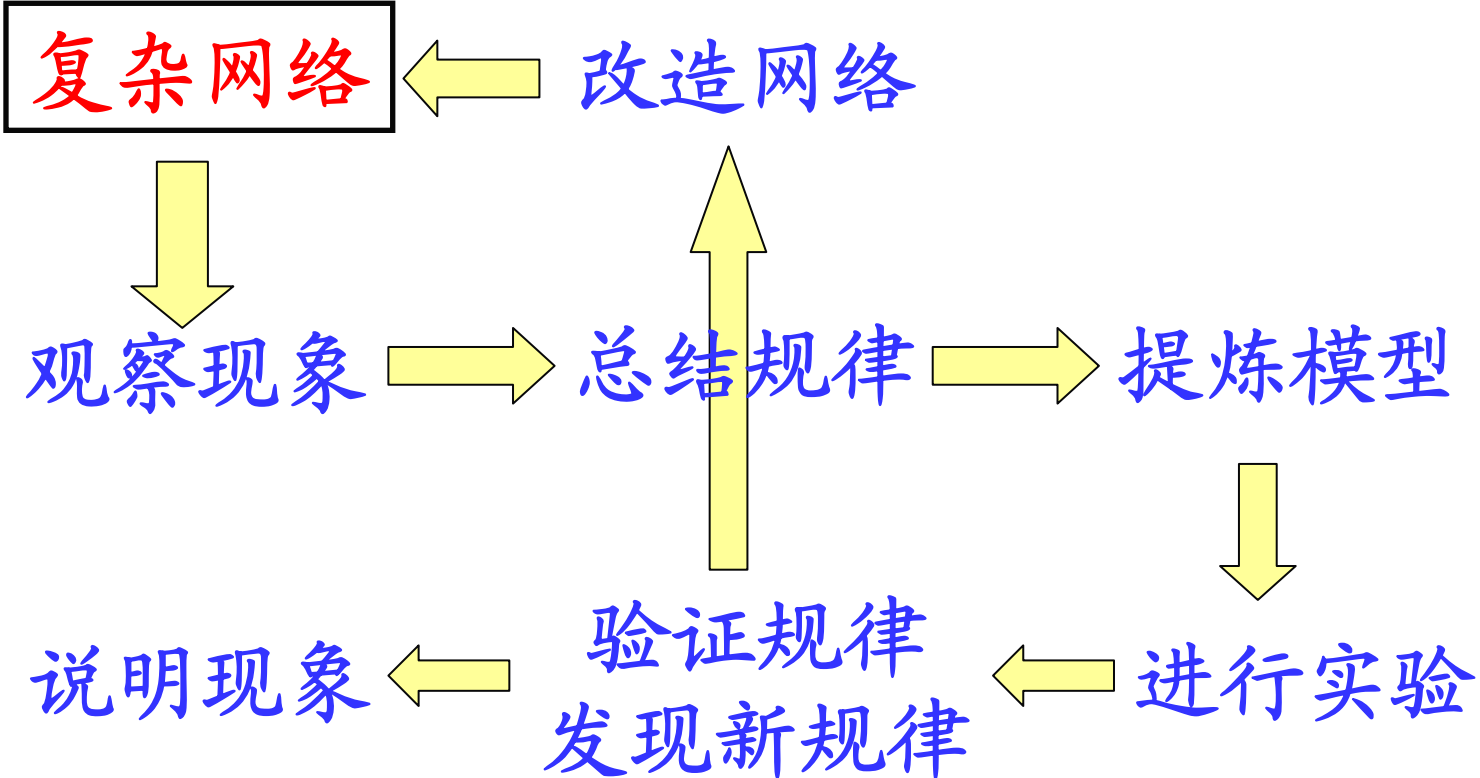


$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} x_j + B_i u_i$$

$$y_i = C_i x$$

2. 研究复杂网络系统关注的重点在何处？ 为此采用了什么新工具和新方法？

研究的是超大型系统的宏观行为，关注的内容虽然与控制理论有些是类似的，但主要采用物理学的研究方法，即观察现象，总结规律，提炼模型，进行实验。模型很大程度上是用来进行仿真实验、发现规律的工具。



注重复杂网络的宏观行为
以实验手段对付各种复杂性

3. 控制科学能为研究复杂网络系统提供什么参考？会遇到什么困难？

在研究复杂网络的结构性质方面，经典大系统的方法论，如结构分析、信息结构与可控性可观性的关系等可作借鉴，但传统算法会遇到超高维数的挑战。

在定量研究网络系统的行为方面，控制理论可以给出网络宏观现象的科学解释，导致新规律的发现，并给出控制和优化网络的方案。但以传统数学模型为基础的方法难以覆盖网络的高度复杂性。

谢谢关注!